سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر حمید حسن‌پور

فصل سوم

تبدیل لاپلاس

فهرست مطالب فصل

۳- ۱- مقدمه

۳- ۲- تعریف

۳- ۳- صفرها و قطب‌های سیگنال در صفحه S

۳ -۴- ویژگی‌های ROC

۳- ۵- ویژگی‌های تبدیل لاپلاس

۳- ۶- تبدیل لاپلاس معکوس

۳- ۷- تابع سیستم

۳- ۸- ویژگی‌های سیستم‌های LTI

۳- ۹- حل سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی

۳- ۱۰- تبدیل لاپلاس یک طرفه

۳- ۱۱- کدهای Matlab

مقدمه

- همانطور که در فصل قبل مطرح شد، تابع ویژه یک سیستم LTI زمان پیوسته به صورت e^{st} تعریف می‌شود. در این رابطه s یک متغیر مختلط است. همچنین مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه e^{st} برای سیستم‌های LTI به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- در رابطه بالا، $H(s)$ تبدیل لاپلاس $h(t)$ نامیده می‌شود.

تعریف

- تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- که در این رابطه s یک متغیر مختلط است. شرط وجود تبدیل لاپلاس برای سیگنال $x(t)$ وجود انتگرال بالا است (حاصل انتگرال بینهایت نشود).

- معمولا برای نشان دادن تبدیل لاپلاس یک سیگنال از دو نمایش زیر استفاده می‌شود.

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\} \qquad x(t) \leftrightarrow X(s)$$

تعریف (ادامه)

- در تبدیل لاپلاس متغیر s به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$s = \sigma + j\omega$$

- با توجه به تعریف متغیر s، صفحه s دارای دو محور است. محور افقی این صفحه σ (بخش حقیقی) محور عمودی آن $j\omega$ (بخش موهومی) است.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ را بیابید. در این سیگنال a عددی حقیقی است.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+s)\tau}d\tau = \frac{-1}{a+s}e^{-(a+s)\tau}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{a+s}\left(\lim_{\tau\to+\infty}\left(e^{-(a+s)\tau}\right) - 1\right)$$

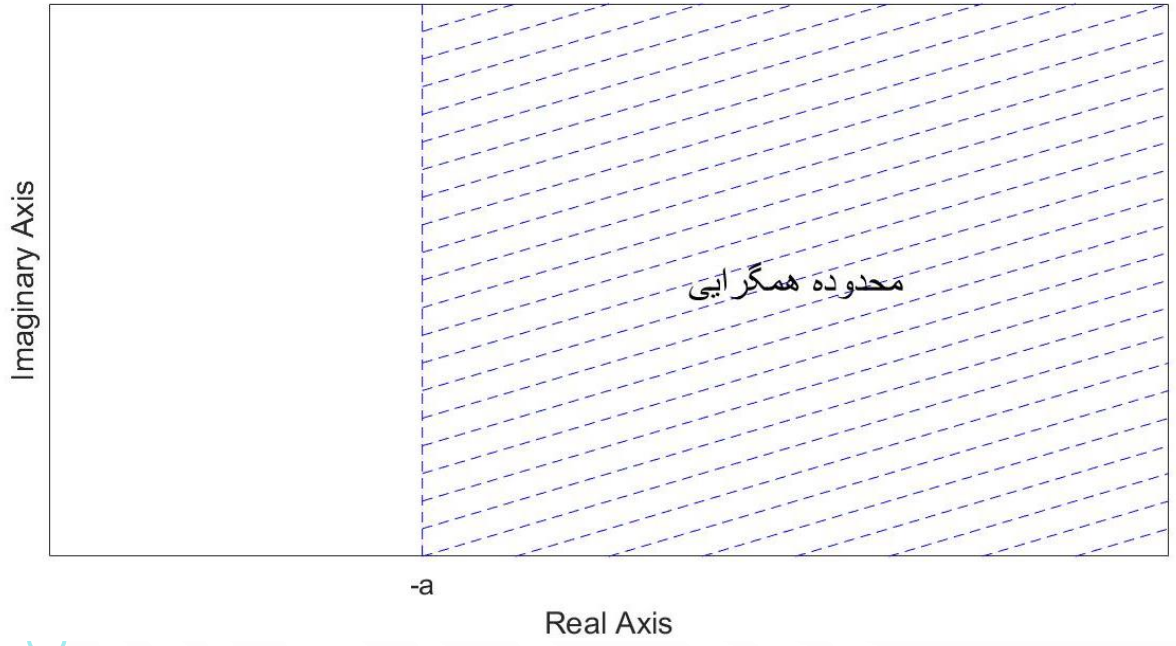
انتگرال بالا در صورتی وجود دارد که شرط $-Re\{a+s\} < 0$ درست باشد؛ بنابراین

$$-Re\{a+s\} < 0 \Rightarrow Re\{s\} > -a$$

اگر متغیر در محدوده $Re\{s\} > -a$ باشد، انتگرال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$X(s) = \frac{-1}{a+s}\left(\lim_{\tau\to+\infty}\left(e^{-(a+s)\tau}\right) - 1\right) = \frac{1}{a+s}$$

- در مثال قبل دیدید که تبدیل لاپلاس برای همه مقادیر s وجود ندارد.
- به محدوده ای از صفحه s که تبدیل لاپلاس در آن وجود دارد، منطقه همگرایی یا ROC گفته می‌شود.
- در محاسبه تبدیل لاپلاس لزوما باید ROC مشخص شود؛ زیرا تبدیل لاپلاس به همراه ROC آن برگشت‌پذیر است.
- در مثال بعد، سیگنالی را می‌بینید که تبدیل لاپلاس یکسانی با سیگنال مثال قبل دارد ولی ROC آن‌ها متفاوت است. این تفاوت تمایز سیگنال در حوزه زمان را مشخص می‌کند.



مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ را بیابید. در این سیگنال a عددی حقیقی است.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-a\tau}u(-\tau)e^{-s\tau}d\tau = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)\tau}d\tau$$

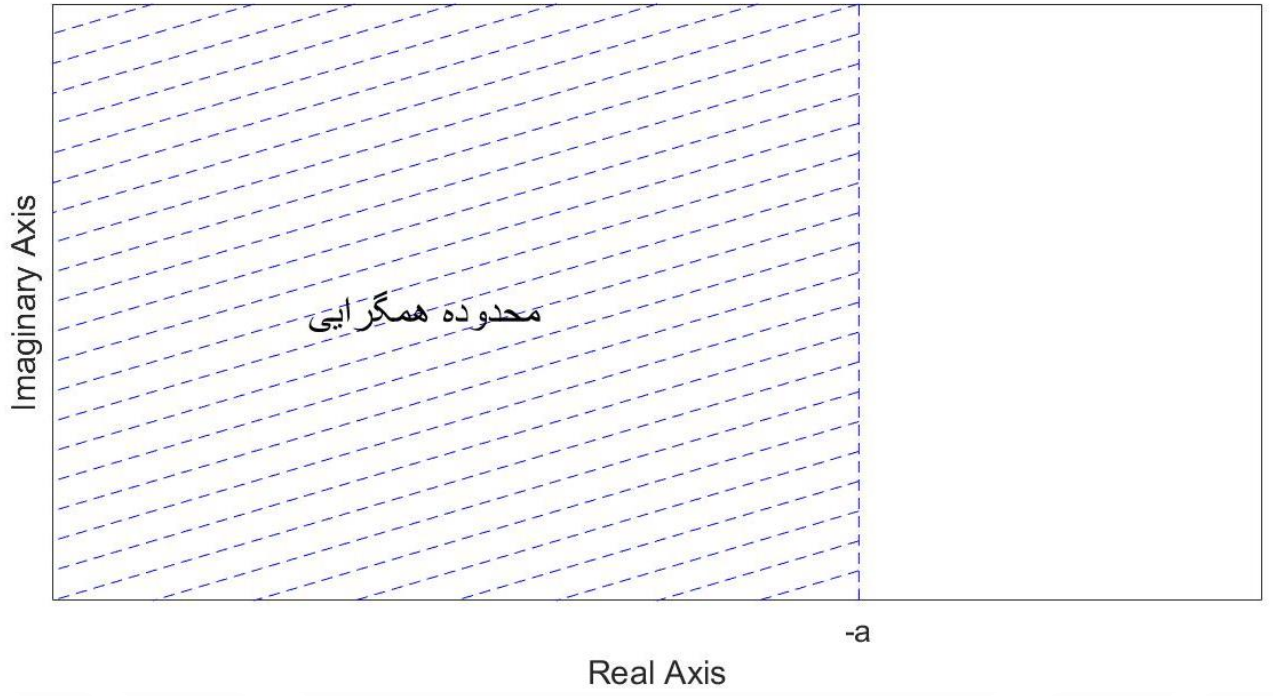
$$= \frac{1}{a+s}e^{-(a+s)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a+s}\left(1 - \lim_{\tau\to+\infty}\left(e^{-(a+s)\tau}\right)\right)$$

انتگرال بالا در صورتی وجود دارد که شرط $-Re\{a+s\} > 0$ درست باشد؛ بنابراین

$$-Re\{a+s\} > 0 \Rightarrow Re\{s\} > -a$$

اگر متغیر در محدوده $Re\{s\} < -a$ باشد، انتگرال به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$X(s) = \frac{-1}{a+s}\left(\lim_{\tau\to+\infty}\left(e^{-(a+s)\tau}\right) - 1\right) = \frac{1}{a+s}$$


Imaginary Axis
محدوده همگرایی
-a
Real Axis

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \delta(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-s\tau}\Big|_{\tau=0} = 1$$

ROC این تبدیل شامل همه صفحه s می‌شود.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = u(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-s\tau}d\tau = -\frac{1}{s}e^{-s\tau}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\left(\lim_{\tau\to+\infty} e^{-s\tau} - 1\right) = \frac{1}{s}$$

شرط وجود انتگرال بالا آن است که $Re\{s\} > 0$.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \cos(\omega_0 t)\, u(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 \tau)\, u(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{0}^{+\infty} \cos(\omega_0 \tau)\, e^{-s\tau} d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}\right) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{j\omega_0 \tau} e^{-s\tau} d\tau + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-j\omega_0 \tau} e^{-s\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{(j\omega_0 - s)\tau} d\tau + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{(-j\omega_0 - s)\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j\omega_0 - s}\right) e^{(j\omega_0 - s)\tau}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-j\omega_0 - s}\right) e^{(-j\omega_0 - s)\tau}\Big|_{0}^{+\infty}$$

شرط همگرا بودن بودن انتگرال اول $Re\{j\omega_0 - s\} < 0$، و شرط همگرا بودن انتگرال دوم $Re\{-j\omega_0 - s\} < 0$ است؛ بنابراین ROC به شکل $Re\{s\} > 0$ خواهد بود. تبدیل لاپلاس این سیگنال با توجه به ROC مطرح شده به صورت زیر است.

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j\omega_0 - s}\right) e^{(j\omega_0 - s)\tau}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-j\omega_0 - s}\right) e^{(-j\omega_0 - s)\tau}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{j\omega_0 - s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{-j\omega_0 - s}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s + j\omega_0 + s - j\omega_0}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)}\right)$$

$$= \frac{s}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)} = \frac{s}{s^2 - j^2\omega_0^2} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{3t}u(t) + e^{-4t}u(-t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{3\tau}u(\tau) + e^{-4\tau}u(-\tau)\right)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{3\tau}u(\tau)e^{-s\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\tau}u(-\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{(3-s)\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{(-4-s)\tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{3-s}e^{(3-s)\tau}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{-4-s}e^{(-4-s)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{3-s}\left(\lim_{\tau\to+\infty} e^{(3-s)\tau} - 1\right) + \frac{1}{-4-s}\left(1 - \lim_{\tau\to-\infty} e^{(-4-s)\tau}\right)$$

شرط همگرا بودن بودن $\lim_{\tau\to+\infty} e^{(3-s)\tau}$ آن است که $Re\{3-s\}<0$ باشد؛ به عبارت دیگر $Re\{s\}>3$ باشد. شرط همگرا بودن بودن $\lim_{\tau\to-\infty} e^{(-4-s)\tau}$ آن است که $Re\{-4-s\}>0$ باشد؛ به عبارت دیگر $Re\{s\}<-4$ باشد.

از آنجایی که دو شرط همگرایی $Re\{s\}>3$ و $Re\{s\}<-4$ با یکدیگر همپوشانی ندارد، بنابراین ROC این تبدیل تهی است. در این حالت می‌توان بیان کرد که سیگنال $x(t)=e^{3t}u(t)+e^{-4t}u(-t)$ تبدیل لاپلاس ندارد.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = tu(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{0}^{+\infty} \tau e^{-s\tau}d\tau$$

ابتدا انتگرال نامعین زیر را حل می‌کنیم. با در نظر گرفتن $dv = e^{-s\tau}d\tau$ و $u = \tau$ و انتگرال‌گیری جز به جز داریم.

$$\int \tau e^{-s\tau}d\tau = \tau\frac{e^{-s\tau}}{-s} - \int \frac{e^{-s\tau}}{-s}d\tau = \tau\frac{e^{-s\tau}}{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-s\tau} + C$$

بنابراین تبدیل لاپلاس $x(t)$ به صورت زیر است.

$$X(s) = \left[\tau\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s\tau} + C\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}$$

شرط وجود انتگرال بالا آن است که $Re\{s\} > 0$.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \sin^2(\omega_0 t)\, u(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(\omega_0 \tau)\, u(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{0}^{+\infty} \sin^2(\omega_0 \tau)\, e^{-s\tau} d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}}{2j} \right)^2 e^{-s\tau} d\tau = \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{e^{2j\omega_0\tau} + e^{-2j\omega_0\tau} - 2}{-4} \right) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{0}^{+\infty} e^{2j\omega_0\tau} e^{-s\tau} d\tau - \frac{1}{4} \int_{0}^{+\infty} e^{-2j\omega_0\tau} e^{-s\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-s\tau} d\tau$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{0}^{+\infty} e^{-(s-2j\omega_0)\tau} d\tau - \frac{1}{4} \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+2j\omega_0)\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-s\tau} d\tau$$

شرط همگرا بودن هر یک از انتگرال‌های بالا به ترتیب به صورت $Re\{-(s-2j\omega_0)\}<0$، $Re\{-(s+2j\omega_0)\}<0$ و $Re\{-s\}<0$ است. اشتراک این سه شرط به صورت $Re\{s\}>0$ است. با این فرض می‌توان نوشت:

$$X(s)=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-(s-2j\omega_0)\tau}d\tau-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-(s+2j\omega_0)\tau}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-s\tau}d\tau$$

$$=\left[\frac{1}{4}.\frac{1}{s-2j\omega_0}e^{-(s-2j\omega_0)\tau}\right]_0^{+\infty}+\left[\frac{1}{4}.\frac{1}{s+2j\omega_0}e^{-(s+2j\omega_0)\tau}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{1}{2s}e^{-s\tau}\right]_0^{+\infty}$$

$$=-\frac{1}{4}.\frac{1}{s-2j\omega_0}-\frac{1}{4}.\frac{1}{s+2j\omega_0}+\frac{1}{2s}=-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4\omega_0^2}+\frac{1}{2s}=\frac{2\omega_0^2}{s\left(s^2+4\omega_0^2\right)}$$

صفرها و قطب‌های سیگنال در صفحه S

- معمولا می‌توان سیگنال $X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}$ را به فرم یک تابع کسری نوشت؛ به عبارت دیگر

$$X(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^n + b_{m-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

- صورت و مخرج این کسر چندجمله‌ای‌هایی با درجه m و n است. همانطور که می‌دانید هر چندجمله‌ای درجه k دارای k ریشه است؛ بنابراین سیگنال $X(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_2)(s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_2)(s - p_1)}$$

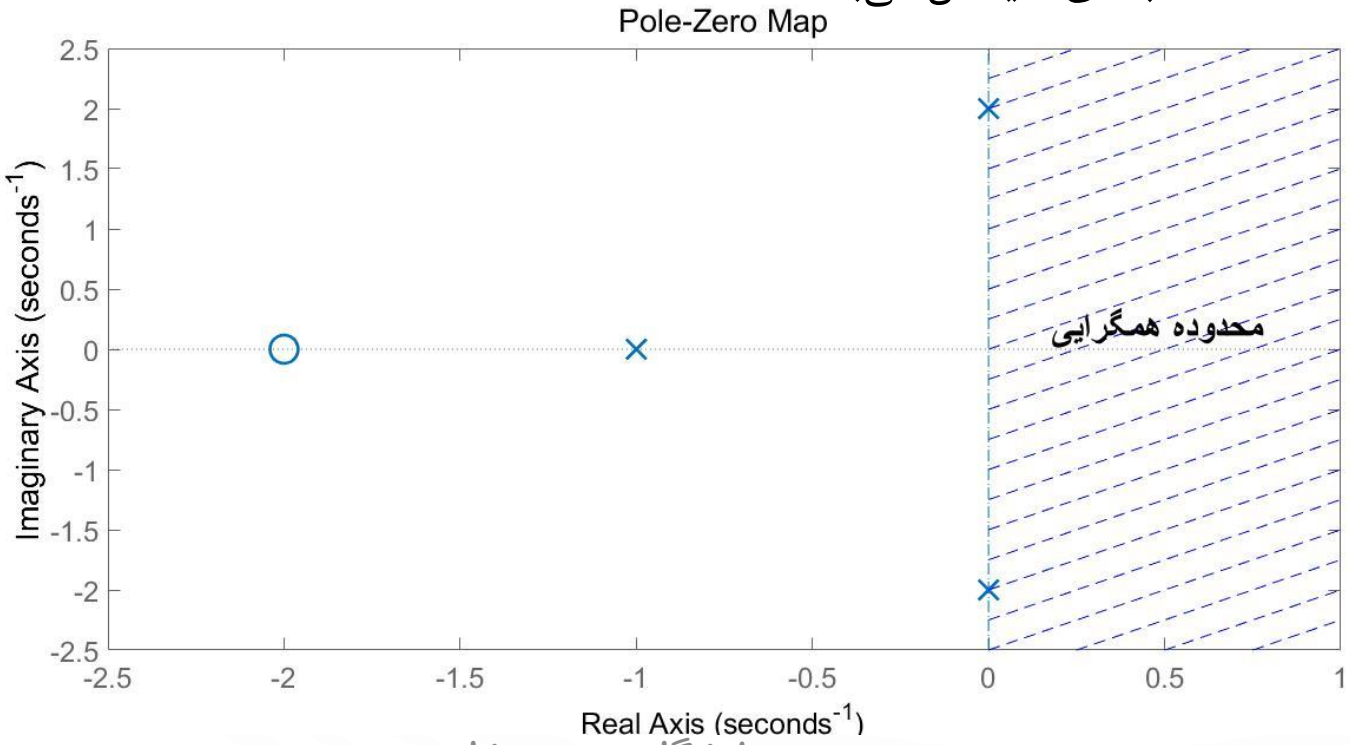
- به نقاط $s = z_i, 1 \le i \le m$ صفرهای سیگنال گفته می‌شود. این نقاط از حل معادله $X(s) = 0$ بدست می‌آید. همچنین به نقاط $s = P_i, 1 \le i \le n$ قطب‌های سیگنال گفته می‌شود. این نقاط مخرج کسر $X(s)$ را صفر می‌کند. به صورت قراردادی نقاط قطب در صفحه s را با علامت × و نقاط صفر در صفحه s را با o نمایش می‌دهند.

مثال: سیگنال $Re\{s\} > 0$,$X(s) = \frac{s-2}{2s^2-8s+6}$ را در نظر بگیرید. قطب‌ها و صفرهای آن را محاسبه و در صفحه s نمایش دهید.

پاسخ:

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3+S^2+4s+4} = \frac{s+2}{(s+1)(s-2j)(s+2j)}$$

بنابراین $s = -2$ صفر سیگنال، و $s = -1, s = \pm 2j$ قطب‌های سیگنال می‌باشد.



ویژگی‌های ROC

<u>ویژگی ۱:</u> ناحیه همگرایی $X(s)$ در صفحه s شامل نوارهای موازی با محور $j\omega$ است.

می‌توان بیان کرد که اگر $X(s)$ برای $s = \sigma_0 + j\omega_0$ همگرا باشد، آنگاه برای $\sigma_0 = Re\{s\}$ نیز همگرا است. شرط همگرایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|X(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)e^{-s\tau}|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)e^{-s\tau}|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-s\tau}|d\tau < \infty$$

با توجه به آنکه $X(s)$ برای $s = \sigma_0 + j\omega_0$ همگرا است، می‌توان نوشت:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-s\tau}|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\left|e^{-(\sigma_0+j\omega_0)\tau}\right|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-\sigma_0\tau}|\left|e^{-j\omega_0\tau}\right|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-\sigma_0\tau}|d\tau < \infty$$

ادامه ویژگی ۱

باید نشان دهیم برای همه sهایی که رابطه فوق در شرط $\sigma_0 = Re\{s\}$ صدق می‌کند، $X(s)$ همگرا است. این نقاط را می‌توان به صورت $s = \sigma_0 + j\omega$ در نظر گرفت. شرط همگرایی برای $s = \sigma_0 + j\omega$ را می‌نویسیم.

$$|X(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-s\tau}|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\left|e^{-(\sigma_0+j\omega)\tau}\right|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-\sigma_0\tau}|\left|e^{-j\omega\tau}\right|d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||e^{-\sigma_0\tau}|d\tau = M < \infty$$

بنابراین $X(s)$ برای $s = \sigma_0 + j\omega$ همگرا است.

ویژگی‌های ROC

ویژگی ۲: ROC شامل هیچ قطبی نمی‌شود.

نقاط قطب $X(s) = \infty$ است و با تعریف همگرایی در تناقض است.

ویژگی‌های ROC

ویژگی ۳: اگر $x(t)$ سیگنالی با عرض محدود باشد و تبدیل لاپلاس آن حداقل برای یک s همگرا شود، آنگاه ناحیه همگرایی کل صفحه s خواهد بود.

فرض کنید $x(t)$ سیگنالی با عرض محدود باشد. بنا به تعریف سیگنال عرض محدود، می‌توان آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$x(t)\begin{cases}\neq 0, & t_1 \le t \le t_2 \\ = 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

فرض کنید $X(s)$ برای $s = \sigma_0 + j\omega_0$ همگرا است. با توجه به ویژگی ۱، برای اثبات همگرایی $X(s)$ در سراسر صفحه s کافی است ثابت کنیم که $X(s)$ بر روی کل محور اعداد حقیقی همگراست. برای اثبات همگرایی بر روی کل محور اعداد حقیقی در صفحه s باید نشان دهیم به ازای همه‌ی نقاط روی این محور انتگرال زیر همگرا است.

$$|X(s)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)e^{-s\tau}|d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)e^{-s\tau}|d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)||e^{-s\tau}|d\tau$$

ادامه ویژگی ۳

با توجه به همگرایی $X(s)$ در $s = \sigma_0 + j\omega_0$ و ویژگی ۱، $X(s)$ در $s = \sigma_0$ همگرا است؛ به عبارت دیگر رابطه زیر برای آن برقرار است.

$$M = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-\sigma_0 \tau} d\tau < \infty$$

برای $s = \sigma_1 > \sigma_0$ می‌توان نوشت:

$$|X(s)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-s\tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-\sigma_1 \tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{(\sigma_0 - \sigma_1)\tau} e^{-\sigma_0 \tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{(\sigma_0 - \sigma_1)\tau} e^{-\sigma_0 \tau} d\tau$$

با توجه به $(\sigma_0 - \sigma_1) < 0$ می‌توان نوشت:

$$|X(s)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{(\sigma_0 - \sigma_1)\tau} e^{-\sigma_0 \tau} d\tau \leq e^{(\sigma_0 - \sigma_1)t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-\sigma_0 \tau} d\tau = e^{(\sigma_0 - \sigma_1)t_1} M < \infty$$

بنابراین $X(s)$ برای $s = \sigma_1 > \sigma_0$ همگرا است.

ادامه ویژگی ۳

برای $s = \sigma_2 < \sigma_0$ می‌توان نوشت:

$$|X(s)| \le \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-s\tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-\sigma_2 \tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{(\sigma_0-\sigma_2)\tau} e^{-\sigma_2 \tau} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{(\sigma_0-\sigma_2)\tau} e^{-\sigma_0 \tau} d\tau$$

با توجه به $(\sigma_0 - \sigma_2) > 0$ می‌توان نوشت:

$$|X(s)| \le \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{(\sigma_0-\sigma_2)\tau} e^{-\sigma_0 \tau} d\tau \le e^{(\sigma_0-\sigma_2)t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(\tau)| e^{-\sigma_0 \tau} d\tau = e^{(\sigma_0-\sigma_2)t_2} M < \infty$$

بنابراین $X(s)$ برای $s = \sigma_2 > \sigma_0$ همگرا است.

ادامه ویژگی ۳

- از آنجایی که $X(s)$ برای $s = \sigma_1 > \sigma_0$، $s = \sigma_2 < \sigma_0$ و $s = \sigma_0$ همگرا است، بنابراین برای کل محور اعداد حقیقی در صفحه s همگرا است.
- با توجه به ویژگی ۱ می‌توان بیان کرد که $X(s)$ برای همه صفحه s همگرا است.

ویژگی‌های ROC (ادامه)

ویژگی ۴: اگر $x(t)$ یک سیگنال دست راستی باشد (یعنی $x(t) = 0, t \leq t_0$) و ROC شامل خط $Re\{s\} = \sigma_0$ باشد، آنگاه ROC شامل $Re\{s\} > \sigma_0$ است.

ویژگی ۵: اگر $x(t)$ یک سیگنال دست چپی باشد (یعنی $x(t) = 0, t \geq t_0$) و ROC شامل خط $Re\{s\} = \sigma_0$ باشد، آنگاه ROC شامل $Re\{s\} < \sigma_0$ است.

ویژگی ۶: اگر $x(t)$ سیگنال دوطرفه باشد (از دو طرف تا بینهایت ادامه داشته باشد) آنگاه ناحیه همگرایی به صورت یک نوار در صفحه s خواهد بود.

ویژگی‌های ROC (ادامه)

ویژگی ۷: اگر $X(s)$ کسری باشد، ROC یا توسط قطب‌ها محدود می‌شود یا اینکه تا بینهایت ادامه دارد.

ویژگی ۸: اگر $X(s)$ کسری باشد و $x(t)$یک سیگنال دست راستی باشد، آنگاه ROCبه صورت $Re\{s\}$ $> \sigma_{max}$ است که σ_{max} بزرگترین بخش حقیقی قطب‌های $X(s)$ است؛ به عبارت دیگر σ_{max} بخش حقیقی سمت راستی‌ترین قطب است.

ویژگی ۹: اگر $X(s)$ کسری باشد و $x(t)$ یک سیگنال دست چپی باشد، آنگاه ROCبه صورت $Re\{s\}$ $< \sigma_{min}$ است که σ_{min}کوچکترین بخش حقیقی قطب‌های $X(s)$ است؛ به عبارت دیگر σ_{min} بخش حقیقی سمت چپی‌ترین قطب است.

ویژگی‌های تبدیل لاپلاس

۳- ۵- ۱- خطی بودن

۳- ۵- ۲- مقیاس در زمان

۳- ۵- ۳- انتقال زمانی

۳- ۵- ۴- انتقال در حوزه S

۳- ۵- ۵- مشتق در زمان و حوزه S

۳- ۵- ۶- انتگرال در زمان

۳- ۵- ۷- کانولوشن در حوزه زمان

۳- ۵- ۸- کانولوشن در حوزه S

۳- ۵- ۹ تئوری مقدار نهایی سیگنال

خطی بودن

اگر سیگنال‌های دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت زیر باشند.

$$X_1(s) = \mathfrak{L}\{x_1(t)\}, ROC = R_1$$

$$X_2(s) = \mathfrak{L}\{x_2(t)\}, ROC = R_2$$

تبدیل لاپلاس ترکیب خطی این سیگنال‌ها به صورت زیر است:

$$\mathfrak{L}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

$$R_1 \cap R_2 \subseteq ROC$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = t^2 e^{-4t} u(t) + 3\cos(7t)\, u(t)$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: بر اساس جدول تبدیل لاپلاس و ویژگی خطی بودن تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت.

$$x_1(t) = t^2 e^{-4t} u(t) \Rightarrow X_1(s) = \frac{2}{(4+s)^3}, Re\{s\} > -4$$

$$x_2(t) = \cos(7t)\, u(t) \Rightarrow X_1(s) = \frac{s}{49+s^2}, Re\{s\} > 0$$

$$\mathfrak{L}\{x_1(t) + 3x_2(t)\} = X_1(s) + 3X_2(s) = \frac{2}{(4+s)^3} + \frac{3s}{49+s^2}$$

ROC تبدیل لاپلاس حداقل شامل $Re\{s\} > 0$ است ولی معمولا به صورت $ROC = Re\{s\} > 0$ در نظر گرفته می‌شود.

مقیاس در زمان

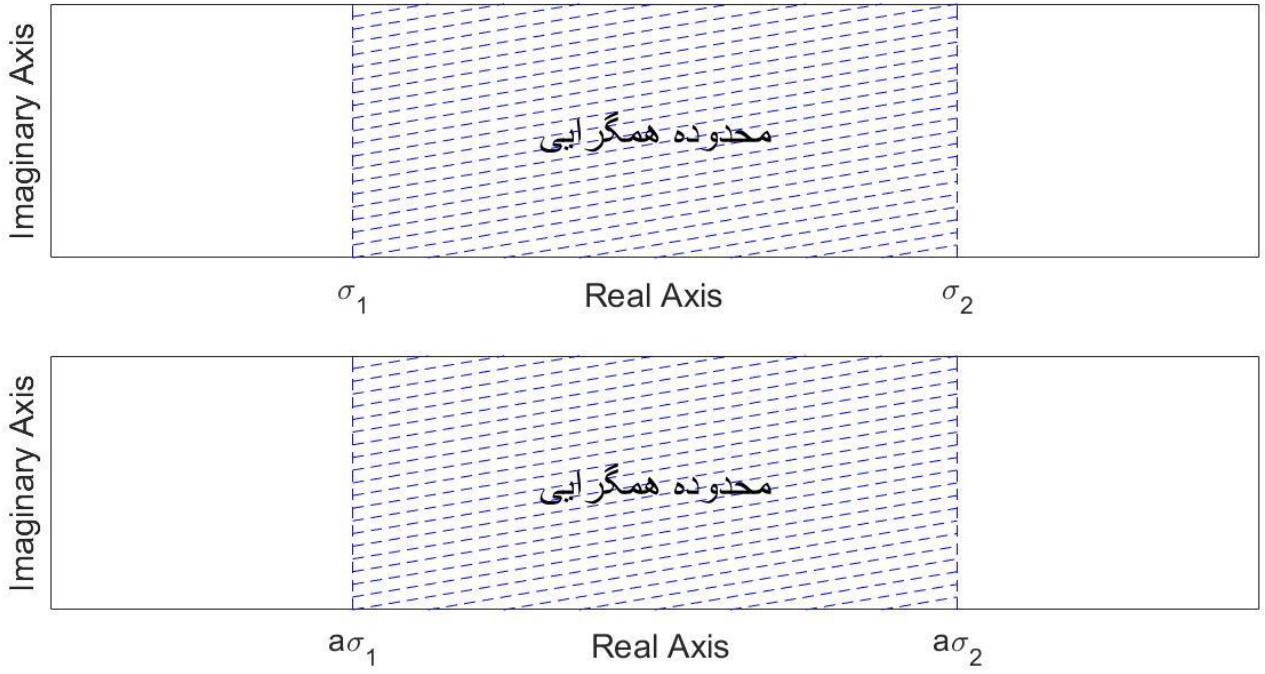
اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ به صورت زیر باشد:

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, ROC = R$$

تبدیل لاپلاس مقیاس زمانی آن به صورت زیر است:

$$\mathfrak{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), ROC = aR$$

مقیاس در زمان (ادامه)



تاثیر مقیاس در زمان در ناحیه همگرایی

a یک حقیقی است، بنابراین در حالت‌های $|a| > 1$ باعث افزایش بازه ROC می‌شود. همچنین اگر $|a| < 1$ باشد، بازه ROC کاهش می‌یابد.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \delta\left(\frac{t}{2}\right) + u\left(\frac{t}{3}\right)$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: بر اساس جدول تبدیل لاپلاس و ویژگی مقیاس زمانی تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت.

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = 1, ROC = s \Rightarrow \mathfrak{L}\left\{\delta\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = 2, ROC = s$$

$$\mathfrak{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, Re\{s\} > 0 \Rightarrow \mathfrak{L}\left\{u\left(\frac{t}{3}\right)\right\} = \frac{3}{3s} = \frac{1}{s}, Re\{s\} > 0$$

$$\mathfrak{L}\left\{\delta\left(\frac{t}{2}\right) + u\left(\frac{t}{3}\right)\right\} = 2 + \frac{1}{s}, Re\{s\} > 0$$

انتقال زمانی

اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ به صورت زیر باشد،

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, ROC = R$$

تبدیل لاپلاس انتقال زمانی آن به صورت زیر است:

$$\mathfrak{L}\{x(t - t_0)\} = e^{-st_0}X(s), ROC = R$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \delta(at + b)$ را محاسبه نمایید. a و b اعدادی حقیقی هستند.

پاسخ: بر اساس جدول تبدیل لاپلاس و ویژگی‌های تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\delta(at + b) = \delta\left(a\left(t + \frac{b}{a}\right)\right) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

$$\mathfrak{L}\left\{\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)\right\} = e^{\frac{b}{a}s}, ROC = s$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathfrak{L}\{\delta(at + b)\} = \frac{1}{|a|}\mathfrak{L}\left\{\delta\left(t + \frac{b}{a}\right)\right\} = \frac{1}{|a|}e^{\frac{b}{a}s}, ROC = s$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: بر اساس جدول تبدیل لاپلاس و ویژگی‌های تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

شرط همگرایی آن است که $Re\{s\} > 0$ باشد.

انتقال در حوزه S

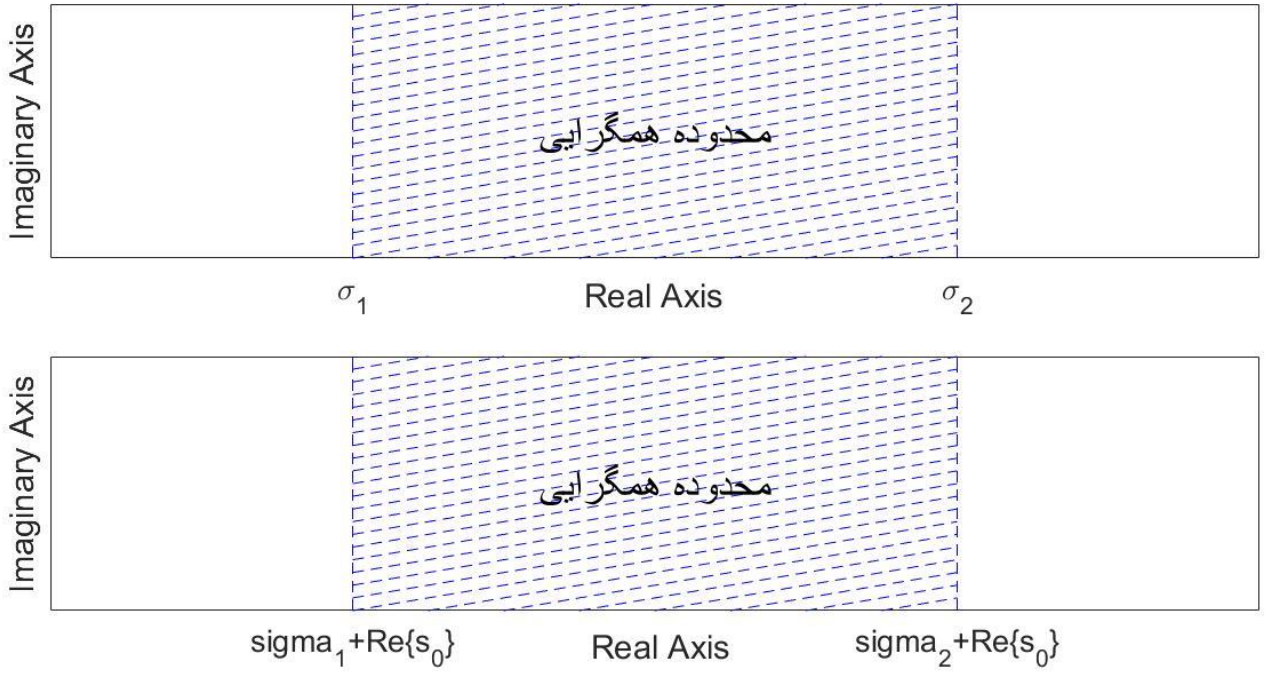
اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ به صورت زیر باشد،

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, ROC = R$$

انتقال تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathfrak{L}\{e^{s_0 t}x(t)\} = X(s - s_0), ROC = R + Re\{s_0\}$$

انتقال در حوزه S (ادامه)



تاثیر انتقال در حوزهS بر ناحیه همگرایی

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \cos(\omega_0 t)\, u(t)$ را بیابید.

پاسخ:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)\, u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

با فرض $f(x) = u(t)$ می‌توان نوشت:

$$X(s) = \frac{1}{2}F(s - j\omega_0) + \frac{1}{2}F(s + j\omega_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

ناحیه همگرایی نیز اشتراک $Re\{s\} > Re\{-j\omega_0\}$ و $Re\{s\} > Re\{j\omega_0\}$ است که به صورت $Re\{s\} > 0$ می‌باشد.

مشتق در زمان و حوزه S

اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ به صورت زیر باشد،

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, ROC = R$$

تبدیل لاپلاس مشتق سیگنال در حوزه زمان آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s), R \subseteq ROC$$

مشتق تبدیل لاپلاس سیگنال در حوزه S آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathfrak{L}\{-tx(t)\} = \frac{d}{ds}X(s), ROC = R$$

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = tu(t)$ را محاسبه نمایید.

$$\mathfrak{L}\{tu(t)\} = -\frac{d}{ds}U(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

مثال: نشان دهید تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = t^n u(t)$ به صورت $X(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ و $ROC = Res\{s\} > 0$ است.

پاسخ: به کمک استقرای ریاضی اثبات می‌کنیم.

پایه استقرا: حکم برای $n = 1$ درست است زیرا

$$\mathfrak{L}\{tu(t)\} = \frac{1!}{s^{1+1}} = \frac{1}{s^2}, ROC = Res\{s\} > 0$$

فرض استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای $n \leq k$ درست است؛ به عبارت دیگر

$$\mathfrak{L}\{t^k u(t)\} = \frac{k!}{s^{k+1}}, ROC = Res\{s\} > 0$$

نتیجه استقرا: باید نشان دهیم که حکم برای $n = k + 1$ درست است؛ به عبارت دیگر

$$\mathfrak{L}\{t^{k+1} u(t)\} = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}, ROC = Res\{s\} > 0$$

$$\mathfrak{L}\{t^{k+1}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\{t^{k}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{k!}{s^{k+1}}\right) = -\left(-\frac{(k+1)k!\,s^{k}}{s^{2k+2}}\right)$$

$$= \frac{(k+1)!\,s^{k}}{s^{k+2}}, ROC = Res\{s\} > 0$$

بنابراین حکم $\mathfrak{L}\{t^{k}u(t)\} = \frac{k!}{s^{k+1}}, ROC = Res\{s\} > 0$ برای هر $n \geq 1$ درست است.

انتگرال در زمان

اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ به صورت زیر باشد،

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, ROC = R$$

تبدیل لاپلاس انتگرال سیگنال به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathfrak{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s), (R \cap Re\{s\} > 0) \subseteq ROC$$

کانولوشن در حوزه زمان

اگر سیگنال‌های دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت زیر باشند،

$$X_1(s) = \mathfrak{L}\{x_1(t)\}, ROC = R_1$$

$$X_2(s) = \mathfrak{L}\{x_2(t)\}, ROC = R_2$$

کانولوشن این سیگنال‌ها به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathfrak{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s), R_1 \cap R_2 \subseteq ROC$$

مثال‌هایی از این ویژگی در ادامه فصل آمده است.

کانولوشن در حوزه S

اگر سیگنال‌های دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت زیر باشند،

$$X_1(s) = \mathfrak{L}\{x_1(t)\}, ROC = R_1$$

$$X_2(s) = \mathfrak{L}\{x_2(t)\}, ROC = R_2$$

کانولوشن این سیگنال‌ها به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathfrak{L}\{x_1(t).\, x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s), R_1 \cap R_2 \subseteq ROC$$

تئوری مقدار نهایی سیگنال

اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ به صورت زیر باشد،

$$X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}, ROC = R$$

آنگاه

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

مثال: مقدار نهایی سیگنال $x(t) = t^n e^{-at} u(t)$ را محاسبه نمایید. ($a > 0$ و $n > 1$)

پاسخ:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} t^n e^{-at} u(t) = (+\infty)^n (0) = (+\infty)(0)$$

برای محاسبه حاصل حد بالا باید رفع ابهام شود. یکی از روش‌ها استفاده ار تئوری مقدار نهایی سیگنال است.

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{n!}{(a+s)^{n+1}} = 0$$

تبدیل لاپلاس معکوس

- تبدیل لاپلاس معکوس تبدیلی است که یک سیگنال در حوزه s را به حوزه زمان می‌برد. تبدیل لاپلاس معکوس به فرم زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$$

- تبدیل لاپلاس معکوس از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

- که در آن c عددی حقیقی و در ناحیه همگرایی $X(s)$ است.
- محاسبه تبدیل لاپلاس معکوس از این طریق نیازمند دانش کافی در حوزه انتگرال اعداد مختلط است. پرداختن به جزییات این موضوع از اهداف این درس نیست.

تبدیل لاپلاس معکوس (ادامه)

- بر اساس ویژگی خطی بودن تبدیل لاپلاس می‌توان نوشت:

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} X_i(s)$$

- که در آن $X_i(s)$ تبدیل لاپلاس $x_i(t)$ است. بر اساس همین رابطه می‌توان نوشت:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس سیگنال $X(s) = \frac{1}{2+s} + \frac{1}{s^2}, ROC = Re\{s\} > 0$ را بیابید.

پاسخ: می‌توانیم سیگنال $X(s)$ را به صورت مجموع دو سیگنال $X_1(S) = \frac{1}{2+s}$ و $X_2(s) = \frac{1}{s^2}$ بنویسیم؛ بنابراین

$$\mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\{X_1(s) + X_2(s)\} = x_1(t) + x_2(t)$$

با توجه به جدول تبدیلات لاپلاس به راحتی در می‌یابیم که

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$x_2(t) = tu(t)$$

بنابراین

$$\mathfrak{L}^{-1}\{X(s)\} = e^{-2t}u(t) + tu(t)$$

تبدیل لاپلاس معکوس با تفکیک تابع کسری

- معمولا می‌توان سیگنال $X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}$ را به فرم یک تابع کسری نوشت. با تفکیک تابع کسری به کسرهای جزئی و استفاده از جدول تبدیل لاپلاس می‌توان عکس تبدیل لاپلاس را محاسبه کرد.

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $X(s) = \frac{s}{2+s}, ROC = Re\{s\} > -2$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s) = \frac{s}{2+s} = \frac{s+2-2}{s+2} = 1 - \frac{2}{s+2}$$

بنابراین تبدیل لاپلاس معکوس سیگنال $X(s)$ به صورت زیر است.

$$x(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

تبدیل لاپلاس معکوس با تفکیک تابع کسری به کسرهای جزئی

- برای تفکیک کسر به کسرهای جزئی روش‌های مختلفی وجود دارد.
- اگر درجه چندجمله‌ای صورت کمتر از مخرج باشد، دو حالت ممکن است رخ دهد.
  - اول آنکه همه قطب‌ها ساده باشند.
  - دوم آنکه قطب‌های چندگانه داشته باشیم.
- کسر $X(s)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$X(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = k\frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \dots (s - z_2)(s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \dots (s - p_2)(s - p_1)}$$

تبدیل لاپلاس معکوس با تفکیک تابع کسری به کسرهای جزئی (ادامه)

- اگر همه قطب‌ها ساده باشند، کسر $X(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$X(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(s - p_i)} = \frac{c_n}{(s - p_n)} + \frac{c_{n-1}}{(s - p_{n-1})} + \cdots + \frac{c_1}{(s - p_1)}$$

که در آن

$$c_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) X(s)$$

تبدیل لاپلاس معکوس با تفکیک تابع کسری به کسرهای جزئی (ادامه)

- اگر کسر قطب‌های چندگانه باشد، کسرهایی با توان‌های مختلف به صورت زیر برای آن‌ها قرار می‌دهیم.
- فرض کنید مخرج کسر شامل فاکتور $(s-p_i)^r$ باشد. در اینصورت کسر $X(s)$ به خاطر قطب p_i شامل فاکتورهای زیر است:

$$\frac{\lambda_{r-1}}{(s-p_i)}+\frac{\lambda_{r-2}}{(s-p_i)^2}+\cdots+\frac{\lambda_0}{(s-p_i)^r}$$

که در آن

$$\lambda_k=\frac{1}{k!}\lim_{s\to p_i}\left(\frac{d^k}{ds^k}F(s)\right), k=0,\ldots,r-1$$

$$F(s)=(s-p_i)^r X(s)$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)=\frac{s+2}{s^2-4s+3}, ROC=Re\{s\}>3$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s)=\frac{s+2}{s^2-4s+3}=\frac{s+2}{(s-1)(s-3)}$$

قطب‌های $X(s)$ به صورت $p_1=1$ و $p_2=3$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$X(s)=\frac{s+2}{(s-1)(s-3)}=\frac{c_1}{(s-1)}+\frac{c_2}{(s-3)}$$

$$c_1=\lim_{s\to1}(s-1)X(s)=\lim_{s\to1}(s-1)\frac{s+2}{(s-1)(s-3)}=\lim_{s\to1}\frac{s+2}{s-3}=-\frac{3}{2}$$

$$c_2=\lim_{s\to3}(s-3)X(s)=\lim_{s\to3}(s-3)\frac{s+2}{(s-1)(s-3)}=\lim_{s\to3}\frac{s+2}{s-1}=\frac{5}{2}$$

بنابراین $X(s)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$X(s)=\frac{-\frac{3}{2}}{(s-1)}+\frac{\frac{5}{2}}{(s-3)}$$

تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)$ به صورت زیر است:

$$x(t)=-\frac{3}{2}e^{t}u(t)+\frac{5}{2}e^{3t}u(t)$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $X(s) = \frac{s+2}{s^2+s-6}$ را در هر یک از حالت‌های زیر بیابید.

الف: $ROC = Re\{s\} > 2$

ب: $ROC = Re\{s\} < -3$

ج: $ROC = -3 < Re\{s\} < 2$

پاسخ: در هر سه حالت، مراحل تا تفکیک به کسرهای جزئی آن یکسان است.

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+s-6} = \frac{s+2}{(s-2)(s+3)}$$

قطب‌های $X(s)$ به صورت $p_1 = 2$ و $p_2 = -3$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-2)(s+3)} = \frac{c_1}{(s-2)} + \frac{c_2}{(s+3)}$$

$$c_1 = \lim_{s\to 2}(s-2)X(s) = \lim_{s\to 2}(s-2)\frac{s+2}{(s-2)(s+3)} = \lim_{s\to 2}\frac{s+2}{s+3} = \frac{4}{5}$$

$$c_2 = \lim_{s\to -3}(s+3)X(s) = \lim_{s\to 3}(s+3)\frac{s+2}{(s-2)(s+3)} = \lim_{s\to 3}\frac{s+2}{s-2} = 5$$

بنابراین $X(s)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$X(s) = \frac{\frac{4}{5}}{(s-2)} + \frac{5}{(s+3)}$$

پاسخ الف: با توجه به آنکه $ROC = Re\{s\} > 2$ است، داریم:

$$x(t) = \frac{4}{5}e^{2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

پاسخ ب: با توجه به آنکه $ROC = Re\{s\} < -3$ است، داریم:

$$x(t) = -\frac{4}{5}e^{2t}u(-t) - 5e^{-3t}u(-t)$$

پاسخ ج: با توجه به آنکه $ROC = -3 < Re\{s\} < 2$ است، داریم:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} = -e^{2t}u(-t)$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\} = e^{-3t}u(t)$$

$$x(t) = -\frac{4}{5}e^{2t}u(-t) + 5e^{-3t}u(t)$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)=\frac{s+2}{s(s^2+9)}, ROC=Re\{s\}>3$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s)=\frac{s+2}{s(s^2+9)}=\frac{s+2}{s(s-3j)(s+3j)}$$

قطب‌های $X(s)$ به صورت $p_1=0$ ، $p_2=3j$ و $p_3=-3j$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$X(s)=\frac{s+2}{s(s-3j)(s+3j)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{(s-3j)}+\frac{c_3}{(s+3j)}$$

$$c_1=\lim_{s\to 0} sX(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s+2}{s(s-3j)(s+3j)}=\lim_{s\to 0}\frac{s+2}{(s-3j)(s+3j)}=\frac{2}{(-3j)(3j)}=\frac{2}{9}$$

$$c_2 = \lim_{s\to 3j}(s-3j)X(s) = \lim_{s\to 3j}(s-3j)\frac{s+2}{s(s-3j)(s+3j)} = \lim_{s\to 3j}\frac{s+2}{s(s+3j)} = \frac{2+3j}{3j(6j)} = -\frac{2+3j}{18}$$

$$c_3 = \lim_{s\to -3j}(s+3j)X(s) = \lim_{s\to -3j}(s+3j)\frac{s+2}{s(s-3j)(s+3j)} = \lim_{s\to -3j}\frac{s+2}{s(s-3j)} = \frac{2-3j}{-3j(-6j)} = -\frac{2-3j}{18}$$

بنابراین $X(s)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$X(s) = \frac{2}{9} - \frac{\frac{2+3j}{18}}{(s-3j)} - \frac{\frac{2-3j}{18}}{(s+3j)}$$

تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)$ به صورت زیر است:

$$x(t) = \frac{2}{9}u(t) - \frac{2+3j}{18}e^{3j}u(t) - \frac{2-3j}{18}e^{-3j}u(t)$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)=\frac{s+2}{s^2-2s+1}, ROC=Re\{s\}>1$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(s)=\frac{s+2}{s^2-2s+1}=\frac{s+2}{(s-1)^2}$$

$p_1=1$ قطب مضاعف $X(s)$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$X(s)=\frac{s+2}{(s-1)^2}=\frac{\lambda_1}{(s-1)}+\frac{\lambda_0}{(s-1)^2}$$

تابع $F(s)$ و مشتق‌های آن را محاسبه می‌کنیم.

$$F(s)=(s-1)^2\frac{s+2}{(s-1)^2}=s+2$$

$$\frac{d}{ds}F(s)=1$$

مجهولات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda_0 = \frac{1}{0!}\lim_{s\to 1}\big(F(s)\big) = \lim_{s\to 1}(s+2) = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1!}\lim_{s\to 1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right) = \lim_{s\to 1}(1) = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)} + \frac{3}{(s-1)^2}$$

تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)$ به صورت زیر است:

$$x(t) = e^t u(t) + 3te^t u(t)$$

- در تفکیک کسر به کسرهای جزئی، اگر درجه چندجمله‌ای صورت بزرگتر یا مساوی درجه چند جمله‌ای مخرج باشد، با تقسیم صورت بر مخرج می‌توان مسئله را حل کرد.

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس $X(s)=\frac{2s^3-s^2+s}{s^2-4s+3}, ROC=Re\{s\}>3$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم و کسر را به فرم مجموع خارج قسمت و باقی‌مانده می‌نویسیم.

$$
\begin{array}{r|l}
2s^3-s^2+s & s^2-4s+3 \\
\cline{2-2}
-(2s^3-8s^2+6s) & 2s+7 \\
\cline{1-1}
7s^2-5s & \\
-(7s^2-28s+21) & \\
\cline{1-1}
23s-21 &
\end{array}
$$

$$X(s)=2s+7+\frac{23s-21}{s^2-4s+3}$$

کسر $\frac{23s-21}{s^2-4s+3}$ باید به کسرهای جزئی تفکیک شود.

$$\frac{23s-21}{s^2-4s+3}=\frac{23s-21}{(s-3)(s-1)}=\frac{c_1}{s-1}+\frac{c_2}{s-3}$$

$$c_1=\lim_{s\to 1}(s-1)\frac{23s-21}{(s-3)(s-1)}=\lim_{s\to 1}\frac{23s-21}{s-3}=-1$$

$$c_2=\lim_{s\to 3}(s-3)\frac{23s-21}{(s-3)(s-1)}=\lim_{s\to 3}\frac{23s-21}{s-1}=24$$

بنابراین $X(s)$ به صورت زیر است.

$$X(s)=2s+7-\frac{1}{s-1}+\frac{24}{s-3}$$

$$x(t)=2\frac{d}{dt}\delta(t)+7\delta(t)-e^{t}u(t)+24e^{3t}$$

تابع سیستم

- همانطور که در فصل قبل اشاره شد، خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ نسبت به ورودی $x(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

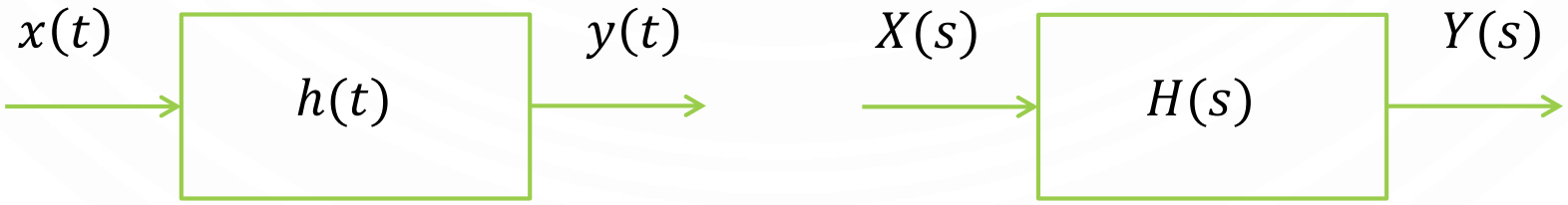
- با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف تساوی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

تابع سیستم (ادامه)

- به $H(s)$ تابع سیستم یا تابع انتقال گفته می‌شود که تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه $h(t)$ است.
- همچنین تابع سیستم به صورت نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به تبدیل لاپلاس ورودی آن است؛ به عبارت دیگر

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



مثال: خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-at}u(t)$ و ورودی $x(t) = e^{at}u(-t)$ را بیابید. در این مثال a > 0 است.

پاسخ:

$$X(s) = -\frac{1}{s-a}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$Y(s) = H(s).X(s) = \frac{1}{s+a}.\frac{-1}{s-a} = \frac{c_1}{s+a} + \frac{c_2}{s-a}$$

$$c_1 = \lim_{s\to -a}(s+a)\frac{1}{s+a}.\frac{-1}{s-a} = \lim_{s\to -a}\frac{-1}{s-a} = \frac{1}{2a}$$

$$c_2 = \lim_{s\to a}(s-a)\frac{1}{s+a}.\frac{-1}{s-a} = \lim_{s\to a}\frac{-1}{s+a} = -\frac{1}{2a}$$

$$Y(s) = H(s).X(s) = \frac{\frac{1}{2a}}{s+a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{s-a}$$

محدوده همگرایی $Y(s)$ به صورت $-a < Re\{s\} < a$ است؛ بنابراین خروجی به صورت زیر خواهد بود.

$$y(t) = \frac{1}{2a}e^{-at}u(t) + \frac{1}{2a}e^{at}u(-t) = \frac{1}{2a}e^{a|t|}$$

مثال: سیستمی LTI به صورت $y(t) = T\{x(t)\}$ را در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ سیگنال $= e^{-3t}u(t)$ است $y_1(t) = te^{-5t}u(t)$.

الف: پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

ب: خروجی این سیستم به ازای ورودی $x_2(t) = tu(t)$ را بیابید.

پاسخ الف: ابتدا تابع سیستم را محاسبه و سپس از روی آن پاسخ ضربه را پیدا می‌کنیم.

$$X_1(s) = \frac{1}{s+3}, Re\{s\} > -3$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{(s+5)^2}, Re\{s\} > -5$$

$$H(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{s+3}{(s+5)^2} = \frac{\lambda_1}{(s+5)} + \frac{\lambda_0}{(s+5)^2}$$

تابع $F(s)$ و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم. سپس به کمک آن‌ها λ_0 و λ_1 محاسبه می‌شود.

$$F(s) = (s+5)^2 \frac{s+3}{(s+5)^2} = s+3$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = 1$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{0!}\lim_{s\to -5} F(s) = \lim_{s\to -5}(s+3) = -2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1!}\lim_{s\to -5} \frac{d}{ds}F(s) = 1$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+5)} - \frac{2}{(s+5)^2}$$

محدوده همگرایی $H(s)$ به صورت $Re\{s\} > -3$ است؛ بنابراین پاسخ ضربه به صورت زیر خواهد بود.

$$h(t) = e^{-5t}u(t) - 2te^{-5t}u(t) = (1-2t)e^{-5t}u(t)$$

پاسخ ب:

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2}, Re\{s\} > 0$$

$$Y_2(s) = H(s)X_2(s) = \frac{s+3}{s^2(s+5)^2} = \frac{\lambda_0}{(s+5)^2} + \frac{\lambda_1}{s+5} + \frac{\gamma_0}{s^2} + \frac{\gamma_1}{s}$$

برای محاسبه λ_0 و λ_1 تابع $F(s)$ و مشتق آن را به صورت زیر تعریف کرده و از روی آن دو مجهول را محاسبه می‌کنیم.

$$F(s) = (s+5)^2 \frac{s+3}{s^2(s+5)^2} = \frac{s+3}{s^2}$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{s+6}{s^3}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{0!}\lim_{s\to -5} F(s) = \lim_{s\to -5}\frac{s+3}{s^2} = -\frac{2}{25}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{1!}\lim_{s\to -5}\frac{d}{ds}F(s) = -\lim_{s\to -5}\frac{s+6}{s^3} = \frac{1}{125}$$

برای محاسبه γ_0 و γ_1 تابع $G(s)$ و مشتق آن را به صورت زیر تعریف کرده و از روی آن دو مجهول را محاسبه می‌کنیم.

$$G(s) = s^2 \frac{s+3}{s^2(s+5)^2} = \frac{s+3}{(s+5)^2}$$

$$\frac{d}{ds}G(s) = \frac{(s+5)^2 - 2(s+5)(s+3)}{(s+5)^4} = -\frac{s+1}{(s+5)^3}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{0!}\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s+3}{(s+5)^2} = \frac{3}{25}$$

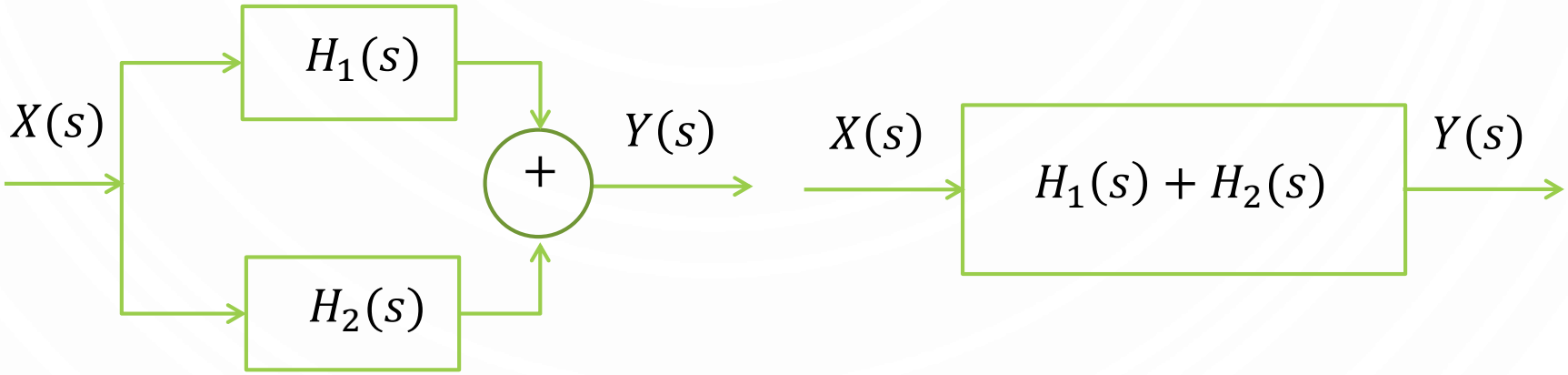
$$\gamma_1 = \frac{1}{1!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}G(s) = -\lim_{s\to 0}\frac{s+1}{(s+5)^3} = -\frac{1}{125}$$

بنابراین خروجی سیستم در حوزه زمان و s به صورت زیر است.

$$Y_2(s) = \frac{-\frac{2}{25}}{(s+5)^2} + \frac{\frac{1}{125}}{s+5} + \frac{\frac{3}{25}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{125}}{s}$$

$$y(t) = -\frac{2}{25}te^{-5t}u(t) + \frac{1}{125}e^{-5t}u(t) + \frac{3}{25}tu(t) - \frac{1}{125}u(t) = \frac{1}{25}\left(-2te^{-5t} + \frac{1}{5}e^{-5t} + 3t - \frac{1}{5}\right)u(t)$$

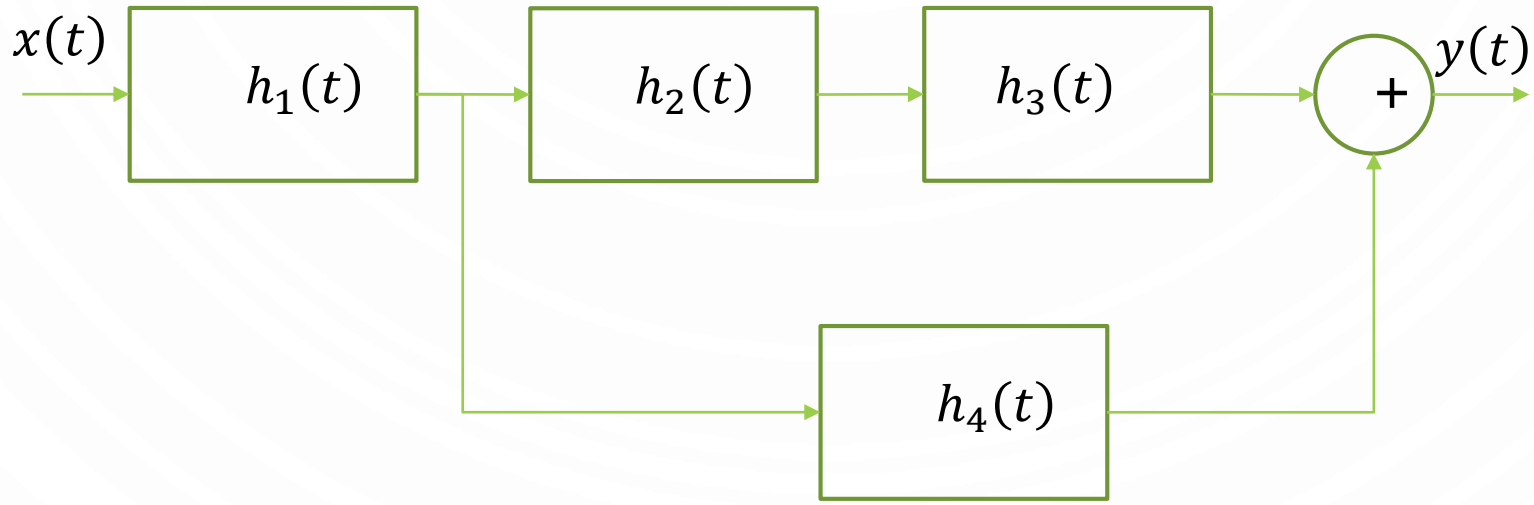
- اگر بخواهیم سیستم‌های LTI موازی را به کمک تابع سیستم مدل کنیم، تابع سیستم به صورت مجموع توابع زیر سیستم‌ها خواهد بود.



- اگر بخواهیم سیستم‌های LTI سری را به کمک تابع سیستم مدل کنیم، تابع سیستم به صورت حاصلضرب توابع زیر سیستم‌ها خواهد بود.

مثال: فرض کنید سیستمی از زیرسیستم‌هایی تشکیل شده است. اگر نحوه چینش زیرسیستم‌ها به نحوی باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است، تابع تبدیل و پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

$$h_1(t) = e^{-t}u(t) \qquad h_2(t) = u(t)$$
$$h_3(t) = e^{-3t}u(t) \qquad h_4(t) = e^{-3t}u(t)$$



پاسخ: پاسخ ضربه سیستم را می‌توان به صورت زیر مدل کرد.

$$h(t) = h_1(t) * \big(h_2(t) * h_3(t) + h_4(t)\big)$$

بنابراین تابع سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$H(s) = \mathrm{H}_1(\mathrm{s})\big(\mathrm{H}_2(\mathrm{s})\mathrm{H}_3(\mathrm{s}) + \mathrm{H}_4(s)\big)$$

تابع تبدیل تک تک سیستم‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$H_1(s) = \frac{1}{s+1}, Re\{s\} > -1$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s}, Re\{s\} > 0$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s+3}, Re\{s\} > -3$$

$$H_4(s) = \frac{1}{s+3}, Re\{s\} > -3$$

بنابراین تابع سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s(s+3)}+\frac{1}{s+3}\right)=\frac{1}{s+1}\left(\frac{s+1}{s(s+3)}\right)=\frac{1}{s(s+3)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+3}$$

$$c_1=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+3)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+3}=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\lim_{s\to -3}(s+3)\frac{1}{s(s+3)}=\lim_{s\to -3}\frac{1}{s}=-\frac{1}{3}$$

بنابراین $H(s)$ و $h(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{3}}{s}-\frac{\frac{1}{3}}{s+3}$$

$$h(t)=\frac{1}{3}u(t)-\frac{1}{3}e^{-3t}u(t)=\frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right)u(t)$$

ویژگی‌های سیستم‌های LTI

۳- ۸ – ۱- علّی و غیرعلّی بودن

۳- ۸- ۲- پایداری

علّی و غیرعلّی بودن

- سیستم علّی به سیستمی گفته می‌شود که پاسخ آن به یک ورودی، فقط به ورودی و ورودی‌های گذشته سیستم بستگی داشته باشد. یک سیستم LTIپیوسته در زمان علی است اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$h(t) = 0, t < 0$$

- پاسخ ضربه یک سیستم علی در لحظات قبل صفر، مقدار صفر دارد.
- با توجه به دست راستی بودن سیگنال پاسخ ضربه و ویژگی‌های ناحیه همگرایی، ROC تبدیل لاپلاس سیستم علی با تابع سیستم $H(s)$ باید به فرم $Re\{s\} > \sigma_0$ باشد؛ به عبارت دیگر، ناحیه همگرایی باید سمت راست قطب‌ها باشد.

پایداری

- همانطور که قبلاً بیان شد، برای پایداری یک سیستم زمان پیوسته LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ باید رابطه زیر برای آن صادق باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$$

- شرط پایداری آن است که انتگرال اندازه پاسخ ضربه محدود باشد.
- شرط لازم پایداری آن است که خط $Re\{s\} = 0$ در ناحیه همگرایی تابع سیستم $H(s)$ باشد. خط $Re\{s\} = 0$ معادل خط $s = j\omega$(محور موهومی) است.

$$|H(s)|_{s=0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right|_{s=0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$$

بنابراین اگر سیستم پایدار باشد، لزوما ROC آن شامل $Re\{s\} = 0$ است.

حل سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی

- یک معادله دیفرانسیلی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- که در آن a_k و b_k ضرایب حقیقی ثابت هستند و لزوماً $a_N \neq 0$. اگر رابطه بالا را از حوزه زمان به حوزه s ببریم، به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

- بنابراین می‌توان نوشت:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

مثال: پاسخ ضربه سیستمی که با معادله دیفرانسیلی $\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$ توصیف می‌شود را بیابید.

پاسخ: معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم به صورت زیر است.

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)\Rightarrow sY(s)+aY(s)=sX(s)+X(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(s+a)=X(s)(s+1)\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+1}{s+a}=1+\frac{1-a}{s+a}$$

با توجه به آنکه سیستم علی است، ناحیه همگرایی به فرم $ROC>\sigma_0$ است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$h(t)=\delta(t)+(1-a)e^{-at}u(t)$$

مثال: یک سسیتم LTI و علّی با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x'(t) + 4x(t)$$

الف: تابع سیستم را بیابید.

ب: پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

پاسخ الف: از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس گرفته و سپس از روی آن تابع سیستم را محاسبه می‌کنیم.

$$S^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = sX(s) + 4X(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(S^2 + 2s + 1\right) = X(s)(s+4) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+4}{S^2 + 2s + 1}$$

پاسخ ب:

$$H(s)=\frac{s+4}{S^2+2s+1}=\frac{s+4}{(s+1)^2}=\frac{\lambda_1}{s+1}+\frac{\lambda_0}{(s+1)^2}$$

تابع $F(s)$ و مشتق آن را محاسبه کرده و سپس به کمک آن‌ها مجهولات را می‌یابیم.

$$F(s)=(s+1)^2\frac{s+4}{(s+1)^2}=s+4$$

$$\frac{d}{ds}F(s)=1$$

$$\lambda_0=\frac{1}{0!}\lim_{s\to-1}F(s)=\lim_{s\to-1}(s+4)=3$$

$$\lambda_1=\frac{1}{1!}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}F(s)=\lim_{s\to-1}(1)=1$$

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{3}{(s+1)^2}$$

با توجه علی بودن سیستم $ROC>-1$ است. از این رو می‌توان نوشت:

$$h(t)=e^{-t}u(t)+3te^{-t}u(t)$$

تبدیل لاپلاس یک طرفه

- تبدیل لاپلاس یک طرفه نوع خاصی از تبدیل لاپلاس است که حدود انتگرال‌گیری آن از 0^- تا $+\infty$ است؛ به عبارت دیگر

$$X(s) \triangleq \int_{0^-}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- علت انتخاب 0^- برای این تبدیل آن است که بتواند سیگنال ضربه را نیز در نظر بگیرد.
- این تبدیل بخش زمان‌های منفی سیگنال $x(t)$ را نظر نمی‌گیرد؛ بنابراین می‌توان $x(t)$ را به صورت یک سیگنال دست راستی در نظر گرفت. از اینرو ناحیه همگرایی آن به صورت $Re\{s\} > \sigma_0$ است.
- غالبا از این تبدیل لاپلاس برای تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده می‌شود.
- بیشتر ویژگی‌هایی که در مورد تبدیل لاپلاس یاد شد، در مورد تبدیل لاپلاس یک طرفه نیز صادق است.

کدهای MATLAB

۳- ۱۱- ۱- دستور sym2poly

۳- ۱۱- ۲- دستور poly2sym

۳- ۱۱- ۳- دستور residue

۳- ۱۱- ۴- دستور laplace

۳- ۱۱- ۵- دستور ilaplace

دستور SYM2POLY

- این دستور ضرایب یک چند جمله‌ای را در قالب یک بردار بر می‌گرداند. ضرایب چند جمله‌ای برای ساخت مجدد چند جمله‌ای و سایر محاسبات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

```
>> syms s
>> c=sym2poly(4*s^3+5*s^2-9)
c =
     4     5     0    -9
```

دستور POLY2SYM

- این دستور دقیقا برعکس دستور sym2poly عمل می‌کند. به این صورت که ضرایب چند جمله‌ای و متغیر چند جمله‌ای را می‌گیرد و چند جمله‌ای را برمی‌گرداند.

```
>> c=[2 5 0 0 1];
>> syms s
>> poly2sym(c,s)
ans =
2*s^4 + 5*s^3 + 1
```

دستور RESIDUE

- از این دستور به دو صورت استفاده می‌شود. در حالت اول، کسر را به کسرهای جزئی تفکیک می‌کند. کسر و کد زیر را در نظر بگیرید.

```
>> b=[1 2];
>> a=[1 -4 3];
>> [r,p,k] = residue(b,a)
r =
    2.5000
   -1.5000
p =
     3
     1
k =
     []
```

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-4s+3}$$

در این حالت، خروجی این دستور سه بردار است. بردار r شامل ضرایب کسرهای جزئی و بردار p شامل قطب هر کسر است. با توجه به نتایج Matlab می‌توان تجزیه به کسرهای جزئی $F(s)$ را به صورت زیر نوشت:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-4s+3} = \frac{2.5}{s-3} - \frac{1.5}{s-1}$$

- در صورتی که درجه چند جمله‌ای صورت کسر بزرگتر یا مساوی درجه چند جمله‌ای مخرج باشد، بردار k شامل چند جمله‌ای خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای صورت به مخرج خواهد بود. به تابع زیر توجه کنید.

$$G(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + s + 7}{s^2 + 9}$$

```
>> b=[1 2 0 1 7];
>> a=[1 0 9];
>> [r,p,k] = residue(b,a)
r =
  -8.5000 -14.6667i
  -8.5000 +14.6667i
p =
   0.0000 + 3.0000i
   0.0000 - 3.0000i
k =
     1     2    -9
```

بر اساس بردارهای r و p می‌توان نوشت:

$$\frac{-8.5000 - 14.6667\text{i}}{s - 3j} + \frac{-8.5000 + 14.6667\text{i}}{s + 3j}$$

بر اساس بردار k می‌توان نوشت:

$$s^2 + 2s - 9$$

بنابراین تابع $G(s)$ را می‌توان به صورت زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{-8.5000 - 14.6667\text{i}}{s - 3j} + \frac{-8.5000 + 14.6667\text{i}}{s + 3j} + s^2 + 2s - 9$$

- حالت دوم استفاده از دستور، دقیقا برعکس حالت اول است؛ به عبارت دیگر، ضرایب و قطب‌های کسرهای جزئی و ضرایب چند جمله‌ای خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج را می‌گیرد و یک کسر برمی‌گرداند.

```
>> r=[2 5];
>> p=[1 3];
>> k=[2 7];
>> [b,a] = residue(r,p,k)
b =
    2    -1   -15    10
a =
    1    -4     3
```

$$H(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{5}{s-3} + 2s + 7$$

بنابراین کسر $H(s)$ به صورت زیر است:

$$H(s) = \frac{2s^3 - s^2 - 15s + 10}{s^2 - 4s + 3}$$

دستور LAPLACE

- این برای محاسبه تبدیل لاپلاس یک طرفه یک تابع مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید می‌خواهیم تبدیل لاپلاس یک طرفه سیگنال $f(t) = e^{-3t}$ را محاسبه نماییم. به کمک کد زیر این موضوع امکان‌پذیر است.

```
>> syms f t s
>> f = exp(-3*t);
>> laplace(f,t,s)
ans =
1/(s + 3)
```

این کد تبدیل لاپلاس را به صورت $F(s) = \frac{1}{s+3}$ محاسبه می‌کند. همچنین تبدیل لاپلاس یک طرفه سیگنال $f(t)$ با تبدیل لاپلاس سیگنال $g(t) = e^{-3t}u(t)$ برابر است.

- برای توابع پله و ضربه به ترتیب می‌توان از دستورات heaviside و dirac استفاده کرد.

مثال: کدی بنویسید که تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{-5t}u(t-7)$ را محاسبه کند.

پاسخ:

```
>> syms f t s
>> f=exp(-5*t)*heaviside(t-7);
>> laplace(f,t,s)
ans =
(exp(-7*s)*exp(-35))/(s + 5)
```

تبدیل لاپلاسی که کد محاسبه می‌کند به صورت زیر است.

$$F(s) = \frac{e^{-7s}e^{-35}}{s+5}$$

دستور ILAPLACE

- این دستور برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس یک طرفه یک تابع مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید می‌خواهیم عکس تبدیل لاپلاس یک طرفه سیگنال $F(s)=\frac{1}{s+3}$ را محاسبه نماییم. به کمک کد زیر این موضوع امکان‌پذیر است.

```
>> syms F s t
>> F=1/(s+3);
>> ilaplace(F,s,t)
ans =
exp(-3*t)
```

خروجی کد به صورت $f(t)=e^{-3t}$ است.

مجددا یادآوری می‌شود دستورهای laplace و ilaplace مربوط به تبدیل لاپلاس یک طرفه است.

مثال: خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-4t}u(t)$ و ورودی $x(t) = e^{-3t}u(t)$ را به وسیله Matlab بیابید.

پاسخ: از آنجایی که هر سیگنال ورودی و پاسخ ضربه در قبل صفر، مقدار صفر دارند، می‌توان از دستورات لاپلاس یک طرفه برای آن‌ها استفاده کرد.

```
clc; clear; close all;
syms h x t s Y y
h=exp(-4*t);
x=exp(-3*t);

H=laplace(h,t,s);
X=laplace(x,t,s);

Y=H*X;
y=ilaplace(Y,s,t);
disp(y);
```

خروجی این کد به صورت زیر است.

```
exp(-3*t) - exp(-4*t)
```

بنابراین سیگنال خروجی به شکل زیر می‌باشد.

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$